Internal energy of many-boson system with three- and four-particle direct correlations taken into account

I. O. Vakarchuk, O. I. Hryhorchak

Department for Theoretical Physics, Ivan Franko National University of Lviv,

12, Drahomanov Str., Lviv, UA–79005, Ukraine

Abstract

In this paper we calculate kinetic, potential and full energy with three- and four-particle direct correlations taken into account at wide temperature region on the base of the density matrix of the interacting Bose-particles [I. O. Vakarchuk, O. I. Hryhorchak, Journ. Phys. Stud. **3**, 3005 (2009)]. In the low temperature limit the obtained expression for the full energy is equal to the wellknown expression for ground state energy in the approximation of "two sums over the wave vector". The results of this work can be applied for the numeric calculation of the heat capacity of liquid ^{4}He in order to check the theoretical and experimental results quantatively, especially in the λ-transition region.

1 Вступ

Розрахунок внутрішньої енергії такої багатобозонної системи, як рідкий ^{4}He має доволі давню історію. Великою мірою це пов'язано із прагненням теоретично описати λ-подібний хід кривої теплоємності в околі точки фазового переходу. Перші кроки були зроблені в напрямі наближеного обчислення енергії основного стану і енергетичного спектру цієї системи ще Боголюбовим [1] майже сімдесят років тому. Пізніше він разом із Зубарєвим у роботі [2] знайшли хвильову функцію основного стану, а також хвильові функції нижніх збуджених рівнів для слабонеідеального бозе-газу з допомогою методу колективних змінних.

В границі зникаюче малої взаємодії енергія основного стану бозе-системи була вперше коректно знайдена в роботі [3]. Розрахунок проводився з використанням псевдотенціалу.

Дослідження термодинамічних функцій основного стану рідкого ^{4}He, зокрема внутрішньої енергії, в наближенні вищому, ніж наближення Боголюбова, було проведено в ряді робіт [4, 5, 6, 7]. Завдяки цим роботам було показано, що врахування три- та чотиричастинкових кореляцій покращує значення для енергії основного стану.

Трохи згодом в роботах [8, 9] з допомогою двочасових температурних функцій Гріна були отримані вирази для термодинамічних функцій рідкого ^{4}He в широкотемпературному діапазоні.

В підході колективних змінних термодинамічні функції багатобозонної системи в широкотемпературній області були знайдені в роботі [10]. Розрахунок проводився за допомогою усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок в наближенні парних кореляцій. Узгодження з експериментальними даними отриманих результатів для кінетичної, потенціальної та повної енергії є досить добрим [11, 12, 13, 14], однак неповним. Це великою мірою пов'язано з тим, що для матриці густини було взято лише наближення парних кореляції. Для більш точних результатів потрібно врахувати три- та чотиричастинкові кореляції. Як відомо [15, 16], їх внесок в значення термодинамічних функцій може виявитися досить значним. Врахування внесків три- і чотиричастинкових кореляцій у внутрішню енергію багатобозонної системи і є предметом цієї роботи.

Вивчення термодинамічних властивостей ^{4}He сьогодні проводиться не тільки для рідкого[19, 18, 17] чи газоподібного стану [20], багато робіт присвячені і твердому стану [25, 24, 23, 22, 21]. Активно вивчається термодинаміка плівок [28, 26, 27] та сумішей [30, 29], а також поведінка ^{4}He в різних середовищах [33, 32, 31].

Варто також зауважити, що важливе значення у дослідженні властивостей рідкого ^{4}He та вивченні його термодинамічних функцій відіграють чисельні методи розрахунку, зокрема такі як: дифузійний метод Монте Карло (дослідження основного стану) [36, 35, 34], метод Монте-Карло з використанням інтегралів за траєкторіями [37, 39, 38] чи функцій Гріна [40], "незміщений" метод Монте-Карло (unbiased Monte Carlo) [41]. При застосуванні згаданих чисельних методів постає проблема задання міжатомного потенціалу взаємодії в гелії. Для цього в різний час використовували потенціал Слетера-Кірквуда[42], Ленарда-Джонса [44, 43], Азіза-Сламана [45, 46]. Застосовують також потенціали, які враховують багаточастинкові кореляції, зокрема тричастинкові [47]. Корисним також є потенціал Аксильрода-Теллера [48], який враховує диполь-диполь-дипольні взаємодії та аналітичний потенціал Паріша-Дикстри [49]. Інший підхід до цієї проблеми був запропований у роботах [8, 50], де міжатомний потенціал взаємодії був відновлений за експериментальними даними. Результатами саме цього підходу ми скористаємося для проведення чисельних розрахунків в цій роботі.

В наших попередніх статтях [51, 52, 53] були знайдені матриця густини, статистична сума, дво-, три- і чотиричастинкові структурні фактори в широкому інтервалі температур із врахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій. Отримані результати стали основою розрахунку виразів для кінетичної, потенціальної і повної енергія багатобозонної системи в наближенні "двох сум ха хвильовим вектором". Чисельний розрахунок термодинамічних функцій проводився з урахуванням раніше знайденої ефективної маси [54]. Отриманий вираз для повної енергії в границі низьких температур узгоджується з уже відомим результатом [4].

2 Енергія, розрахована на основі матриці густини взаємодіючих бозе-частинок без виділення матриці густини ідеального бозе-газу

В роботі [52] була знайдена статистична сума багатобозонної системи в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" із врахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій на основі матриці густини взаємодіючих бозе-частинок без віділення матриці густини ідеального бозе-газу у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta F_0} \exp\left[\frac{\overline{C}_0}{N}\right] \exp\left[2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \frac{\overline{C}_2(\mathbf{q}_1)}{\alpha_{q_1}\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]} + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \frac{\overline{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]}\right. \\ &+ \left.\frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \frac{\overline{C}_3{}^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_1}\right]\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_2}\right]\tanh\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}\right], \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\alpha_q = \sqrt{1 + \frac{2N}{V}\nu_q \Big/ \frac{\hbar^2 q^2}{2m}},$$
$$E_q = \varepsilon_q \alpha_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}\alpha_q, \tag{2}$$

$$F_0 = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 - \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{8m}(\alpha_q - 1)^2 + \frac{1}{\beta}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left(1 - e^{-\beta E_q}\right), \tag{3}$$

$\nu_q = \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}\Phi(r)d\mathbf{r}$ — це коефіцієнт Фур'є енергії парної взаємодії між частинками, $\beta = 1/T$ — обернена температура. Явні вирази для величин $\overline{C}_2(\mathbf{q_1})$, $\overline{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3})$, $\overline{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2})$ наведені у роботі [51, 53].

Якщо скористатися виразом (1) для статистичної суми і згідно з формулою

$$E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z \tag{4}$$

знайти внутрішню енергію багатобозонної системи в наближенні “двох сум за хвильовим вектором”, то виявиться, що в границі низьких температур вона поводиться правильно і переходить у вже відомий [4] вираз, натомість в границі високих температур дає некоректні результати. Це пов’язано з тим, що і статистична сума, якою ми скористалися для розрахунку, не переходить у класичний вираз при високих температурах, як це було показано раніше [52]. Для того, щоб отримати коректний вираз для енергії, який би давав правильні результати як в границі низьких, так і в границі високих температур, потрібно розрахунок енергії проводити з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу.

3 Енергія, розрахована на основі матриці густини взаємодіючих бозе-частинок з виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу

Середню енергію системи N безспінових бозе-частинок з координатами $(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)$ можна записати наступним чином:

$$E=\langle\hat{H}\rangle=\langle\hat{K}\rangle+\langle\hat{\Phi}\rangle, \tag{5}$$

де $\hat{H}$ — гамільтоніан вказаної системи, $\hat{K}$ — оператор кінетичної, а $\hat{\Phi}$ — потенціальної енергії:

$$\hat{K}=-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\nabla_j^2, \tag{6}$$

$$\hat{\Phi}=\sum_{1\le i<j\le N}\Phi(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|), \tag{7}$$

Усереднення проводиться з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій із виділеною матрицею густини ідеального бозе-газу:

$$R(\rho|\rho') = R_N^0(r|r')P_{pair}(\rho|\rho')P(\rho|\rho')=R_N^0(r|r')\exp[U], \tag{8}$$

де $R_N^0(r|r')$ — матриця густини невзаємодіючих бозе-частинок, $P_{pair}(\rho|\rho')$ — фактор, який враховує парні кореляції, а $P(\rho|\rho')$ — фактор, який враховує прямі три- і чотиричастинкові кореляції.

$$R_N^0(r'|r) = \frac{1}{N!}\left(\frac{m}{2\pi\beta\hbar^2}\right)^{3N/2}\sum_Q \exp\left[-\frac{m}{2\beta\hbar^2}\sum_{j=1}^{N}(r'_j-r_{Q_j})^2\right],$$

де підсумовування за Q означає підсумовування за всіма перестановками координат частинок. Вираз для величини U має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} U &= b_0+\sum_{\mathbf{q}\neq 0}b_1(\mathbf{q})\rho_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}_1}+\sum_{\mathbf{q}\neq 0}b_2(\mathbf{q})(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}+\rho'_{\mathbf{q}}\rho'_{-\mathbf{q}})+c_0+\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{i_1=0}^{1}\sum_{j_1=0}^{1}c_2(1^{j1},-1^{i_1})\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{1}c_3(1^{i_1},2^{i_2},3^{i_3})\rho_{\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{i_2}\rho_{\mathbf{q}_3}^{i_3} \\ &+ \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{i_1,i_2=0}^{1}\sum_{j_1,j_2=0}^{1}c_4(1^{j_1},-1^{i_1},2^{j_2},-2^{i_2})\rho_{\mathbf{q}_1}^{j_1}\rho_{-\mathbf{q}_1}^{i_1}\rho_{\mathbf{q}_2}^{j_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}^{i_2}, \end{aligned} \tag{9}$$

де індекси i_1, i_2, i_3, j_1, j_2 пробігають значення $0, 1$. Значення 1 відповідає присутності штриха біля відповідної величини, а значення 0 — відсутності;

$$b_0 = -\beta E_0 + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left[\frac{\alpha_q \tanh\left(\frac{\beta E_q}{2}\right)}{\tanh\left(\frac{\beta\varepsilon_q}{2}\right)}\right] + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\ln\left(\frac{1-e^{-\beta\varepsilon_q}}{1-e^{-\beta E_q}}\right), \tag{10}$$

$$b_1(q) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}(\beta E_q)} - \frac{1}{\mathrm{sh}(\beta\varepsilon_q)}\right], \tag{11}$$

$$b_2(q) = -\frac{1}{4}\left[\alpha_q \,\mathrm{cth}(\beta E_q) - \mathrm{cth}(\beta\varepsilon_q)\right]. \tag{12}$$

Явні вирази для величин c_0, c_2, c_3, c_4 є доволі громіздкими і наведені у роботі [53].

4 Середня кінетична енергія

Скористаємося результатами роботи [10] і запишемо вираз для кінетичної енергії в наступний спосіб:

$$\left\langle \hat{K} \right\rangle = \left\langle \hat{K}_1 \right\rangle + \left\langle \hat{K}_2 \right\rangle + \left\langle \hat{K}_3 \right\rangle, \tag{13}$$

де

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N \left[P_{pair}(\rho|\rho')P(\rho|\rho')\sum_{j=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2\nabla_j^2}{2m}\right)R_N^0(\mathbf{r}'_1, ..., \mathbf{r}'_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)\right]_{\mathbf{r}'_1=\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}'_N=\mathbf{r}_N}}{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pair}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)}. \tag{14}$$

Застосувавши теорму Блоха: $-\partial R_N^0/\partial\beta = \hat{K}R_N^0$ до написаного вище виразу, знайдемо, що середнє

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pair}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; \beta')\right\}_{\beta'=\beta}, \tag{15}$$

яке у прийнятому нами наближенні "двох сум за хвильовим вектором" можна подати у вигляді:

$$\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle = \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left\{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N P_{pair}(\rho|\rho)R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N; \beta')\right\}_{\beta'=\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta'}\ln\left[\langle P(\rho|\rho)\rangle\right]_{\beta'=\beta}. \tag{16}$$

Перший доданок у написаному виразі був знайдений в роботі [10], а середнє $\langle P(\rho|\rho)\rangle$ має такий зміст:

$$\langle P(\rho|\rho)\rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)P_{pair}(\rho|\rho)P(\rho|\rho)}{\int d\mathbf{r}_1 ... \int d\mathbf{r}_N R_N^0(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N|\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)P_{pair}(\rho|\rho)}. \tag{17}$$

Це середнє вже було знайдене в роботі [53]:

$$\begin{aligned}\langle P(\rho|\rho)\rangle = \exp\Bigg\{ & C_0 + 2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}C_2(\mathbf{q}_1)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)} + \frac{2}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\frac{S_0(q_1)}{1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)}\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} \\ & + \frac{2}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\frac{S_0^{(3)}(q_1, q_2, q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} \\ & + \frac{12}{N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_1)S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}\Bigg\},\end{aligned} \tag{18}$$

де від величини β' залежать лише парний $S_0(q_i), i=1,2,3$ і тричастинковий $S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)$ структурні фактори ідеального бозе-газу.

В результаті для величини $\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle$ отримаємо такий вираз:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1} e^{\beta\varepsilon_q}-1} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\lambda_q}{1+\lambda_q S_0(q)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial \beta} - \frac{1}{8N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} \left[\prod_{i=1}^{2} \frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)}\right] \\
&\times \left\{ \frac{\partial S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right] S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) \right\} \\
&+ \frac{1}{3!}\frac{1}{2N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \left[\prod_{i=1}^{3} \frac{\lambda_{q_i}}{1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)}\right] \left\{ 2S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \frac{\partial S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{\partial\beta} \right. \\
&- \left. \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right] \left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right]^2 \right\} - 2\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \frac{C_2(\mathbf{q}_1)}{[1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)]^2} \frac{\partial S_0(q_1)}{\partial\beta} \\
&- \frac{2}{N} \sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \sum_{\substack{\{i,j\}=\{1,2\}, \\ \{2,3\},\{3,1\}}} \frac{1}{[1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)]^2} \frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta} \\
&- \frac{2}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} \frac{C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_1} S_0(q_1)][1+\lambda_{q_2} S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3} S_0(q_3)]} \\
&\times \left(\frac{\partial S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3)}{\partial\beta} - \left[\sum_{j=1}^{3} \frac{\lambda_{q_j}}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{\partial S_0(q)}{\partial\beta}\right] S_0^{(3)}(q_1,q_2,q_3) \right) \\
&+ \frac{12}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \sum_{\substack{\{i,j,l\}=\{1,2,3\}, \\ \{2,3,1\},\{3,1,2\}}} \frac{1}{[1+\lambda_{q_i} S_0(q_i)]^2} \frac{S_0(q_j)}{1+\lambda_{q_j} S_0(q_j)} \frac{S_0(q_l)}{1+\lambda_{q_l} S_0(q_l)} \frac{\partial S_0(q_i)}{\partial\beta}. \quad (19)
\end{aligned}
$$

Тепер перейдімо до розрахунку наступних середніх $\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle$, вираз для яких легко записати, скориставшись результатами роботи [10]:

$$
\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \left(\nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2\right) |_{r_1'=r_1,\ldots r_N'=r_N} \right\rangle,
$$

$$
\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{4m} \left\langle \sum_{j=1}^{N} (\nabla_j^2 U + [\nabla_j U]^2 \right\rangle.
$$

Якщо перейти до представлення колективних змінних, то для величин $\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle$ і $\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle$ отримаємо наступні вирази:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \left(\left\langle \rho_{\mathbf{k}_1} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}} \frac{\partial U}{\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle \right) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}} \sum_{\mathbf{k}_2\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m} \left(\left\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{\mathbf{k}_2}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle + \left\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}} \frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_2}} |_{\rho=\rho'} \right\rangle \right), \quad (20)
\end{aligned}
$$

$$
\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \left(-\left\langle \rho_{\mathbf{k}_1} \frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial U}{\partial\rho_{\mathbf{k}_1}} \frac{\partial U}{\partial\rho_{-\mathbf{k}_1}} \right\rangle \right)
$$

$$
- \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}_1 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{k}_2 \neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2 \neq 0}} \frac{\hbar^2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2)}{2m} \left(\left\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1} \partial \rho_{\mathbf{k}_2}} \right\rangle + \left\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1}} \frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_2}} \right\rangle \right). \tag{21}
$$

Знак середнього $\langle ... \rangle$ тут знову має зміст усереднення з матрицею густини взаємодіючих бозе-частинок із врахуванням прямих три- та чотиричастинкових кореляцій:

$$
\langle ... \rangle = \frac{\int d\mathbf{r}_j \ldots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r) P_{pair}(\rho|\rho') P(\rho|\rho)(...)}{\int d\mathbf{r}_j \ldots \int d\mathbf{r}_N R_N^0(r|r') P_{pair}(\rho|\rho) P(\rho|\rho)}.
$$

Зауважимо також, що

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1}}\right|_{\rho=\rho'} &= -\frac{\lambda_{k_1}}{2} \rho_{-\mathbf{k}_1} + 4C_2(\mathbf{k}_1)\rho_{-\mathbf{k}_1} + \frac{6}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \\
&+ \frac{8}{N} \sum_{\mathbf{q}_1 \neq 0} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \rho_{-\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2},
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{-\mathbf{k}_1}}\right|_{\rho=\rho'} = 2b_2(k_1) + \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1) + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2}, \tag{23}
$$

$$
\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}_2}}\right|_{\rho=\rho'} = \frac{6}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_3 \neq 0} \widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3) \rho_{\mathbf{q}_3} + \frac{4}{N} \widetilde{C}_4'(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \rho_{-\mathbf{k}_1} \rho_{-\mathbf{k}_2}, \tag{24}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1) = c_2(1, -1) + c_2(-1, 1), \\
&\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{j_2, i_2=0}^{1} c_4(1, -1, 2^{j_2}, -2^{i_2}), \\
&\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3) = \sum_{i_3=0}^{1} c_3(1, 2, 3^{i_3}),
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{C}_4'(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \sum_{j_1, i_2=0}^{1} [c_4(1, -1^{i_1}, 2, -2^{i_2}) + c_4(-1^{i_1}, 1, 2, -2^{-i_2}) + c_4(1, -1^{i_1}, -2^{j_2}, 2) + c_4(-1^{i_1}, 1, -2^{i_2}, 2)]. \tag{25}
$$

Явні вирази для величин $\widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1)$, $\widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3)$, $\widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2)$ наведені в Додатку 1. Величини $C_2(\mathbf{k}_1)$, $C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}_3)$, $C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2)$ були знайдені раніше [53].

Підставляючи у рівність (20) отримані вирази (22), (23), (24), в прийнятому нами наближенні "двох сум за хвильовим вектором" знайдемо:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_2 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{k}_1 \neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \Bigg\{ -\frac{\lambda_{k_1}}{4} (\lambda_{k_1} + 2) \langle \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{-\mathbf{k}_1} \rangle + 2C_2(\mathbf{k}_1)(\lambda_{k_1} + 1) \langle \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{-\mathbf{k}_1} \rangle - \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1) - 2b_2(\mathbf{k_1}) \\
&+ \frac{3(\lambda_{k_1} + 1)}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \langle \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle + \frac{4(\lambda_{k_1} + 1)}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} C_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \langle \rho_{\mathbf{k}_1} \rho_{-\mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle \\
&- \frac{18}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3 \neq 0 \\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} C_3^2(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \langle \rho_{-\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_3} \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{\mathbf{q}_3} \rangle - \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_2 \neq 0} \widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_2) \langle \rho_{\mathbf{q}_2} \rho_{-\mathbf{q}_2} \rangle \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}} \sum_{\mathbf{k}_2\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m} \left\{ \frac{6}{\sqrt{N}} \widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rangle + \frac{\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{4} \langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle \right.\\
&- \quad \left. \frac{3}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\left(\lambda_{k_1}\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle + \lambda_{k_2}\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle\right)\right\}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Аналогічно, для величини $\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle$ матимемо:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_3 \right\rangle \;=\; & \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \left\{ \frac{\lambda_{k_1}}{2}(\lambda_{k_1}+1)\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle - 2C_2(\mathbf{k}_1)(2\lambda_{k_1}+1)\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle - \frac{\lambda_{k_1}}{2} + 2C_2(\mathbf{k}_1) \right.\\
&- \quad \frac{3(2\lambda_{k_1}+1)}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle - \frac{4(2\lambda_{k_1}+1)}{N} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\langle \rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle\\
&+ \quad \left. \frac{36}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3^2(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\langle \rho_{-\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_3}\rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{\mathbf{q}_3}\rangle + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)\langle \rho_{\mathbf{q}_2}\rho_{-\mathbf{q}_2}\rangle \right\}\\
&- \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}} \sum_{\mathbf{k}_2\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m} \left\{ \frac{6}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rangle + \frac{\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{2} \langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle \right.\\
&- \quad \left. \frac{6}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\left(\lambda_{k_1}\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rho_{\mathbf{k}_1}\rho_{-\mathbf{k}_1}\rangle + \lambda_{k_2}\langle \rho_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\rho_{\mathbf{k}_2}\rho_{-\mathbf{k}_2}\rangle\right)\right\}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Підставивши у (26) і (27) відповідні вирази для всіх середніх $\langle ... \rangle$ (вони є наведені в роботі [53]) і обмежившись наближенням “двох сум за хвильовим вектором”, отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}_{23} \right\rangle \;=\; & \left\langle \hat{K}_2 \right\rangle + \left\langle \hat{K}_3 \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}_1\neq 0} \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} \left\{ \frac{\lambda_{k_1}^2}{4} S(k_1) - 2C_2(\mathbf{k}_1)\lambda_{k_1} \frac{S_0(k_1)}{1+\lambda_{k_1}S_0(k_1)} + (2C_2(\mathbf{k}_1) - \widetilde{C}_2(\mathbf{k}_1)) \right.\\
&- \quad \frac{3\lambda_{k_1}}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) S^{(3)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{4\lambda_{k_1}}{N} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2) \frac{S_0(k_1)}{1+\lambda_{k_1}S_0(k_1)} \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(k_2)}\\
&+ \quad \left. \frac{18}{N} \sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3^2(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} \frac{S_0(q_3)}{1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)} + \frac{4}{N} \sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} (C_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2) - \widetilde{C}_4(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2)) \frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} \right\}\\
&- \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{\mathbf{k}_1\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2\neq 0}} \sum_{\mathbf{k}_2\neq 0} \frac{\hbar^2(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)}{2m} \left\{ \frac{6}{\sqrt{N}} (C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) - \widetilde{C}_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)) \frac{S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|}S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)} \right.\\
&+ \quad \frac{\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}}{4} S^{(3)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) - \frac{3}{\sqrt{N}} C_3(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) \left(\lambda_{k_1} \frac{S_0(k_1)}{1+\lambda_{k_1}S_0(k_1)} \frac{S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|}S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)} \right.\\
&+ \quad \left.\left. \lambda_{k_2} \frac{S_0(k_2)}{1+\lambda_{k_2}S_0(k_2)} \frac{S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)}{1+\lambda_{|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|}S_0(|\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}|)} \right) \right\}, \qquad (28)
\end{aligned}
$$

де $S(k_1)$, $S^{(3)}(\mathbf{k}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)$ — це дво- і тричастинковий структурний фактор відповідно [53].

5 Середня потенціальна енергія

В представленні колективних змінних потенціальна енергія (7) запишеться так:

$$
\Phi = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \nu_q(\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}} - 1). \qquad (29)
$$

Беручи до уваги явний вигляд для величини $S(q) = \langle \rho_{\mathbf{q}} \rho_{-\mathbf{q}} \rangle$ [53], а також рівність

$$\frac{N}{2V}\nu_q = \frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_q^2 - 1), \tag{30}$$

для середнього значення потенціальної енергії отримаємо наступний вираз:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi \rangle \;&=\; \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \sum_{\mathbf{q}\neq 0} \frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_q^2 - 1)\left(\frac{S_0(q)}{1+\lambda_q S_0(q)} - 1\right) \\
&- \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\lambda_{q_2}}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} S_0^{(4)}(\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, -\mathbf{q}_2) \\
&+ \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0} \frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{1}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\lambda_{q_2}}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)}\frac{\lambda_{q_3}}{1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)}\left[S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\right]^2 \\
&+ 4\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)C_2(\mathbf{q}_1)\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2} + \frac{12}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{S_0(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \\
&\times \frac{S_0^{(3)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]} + \frac{8}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0} C_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\frac{S_0(q_2)}{1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)} \\
&+ \frac{72}{N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2}{8m}(\alpha_{q_1}^2 - 1)\frac{S_0^2(q_1)}{[1+\lambda_{q_1}S_0(q_1)]^2}\sum_{\substack{\mathbf{q}_2\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0} C_3^2(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)\frac{S_0(q_2)S_0(q_3)}{[1+\lambda_{q_2}S_0(q_2)][1+\lambda_{q_3}S_0(q_3)]}.
\end{aligned} \tag{31}$$

З написаного вище виразу потрібно виключити величину ν_0. Зробити це можна з допомогою рівності [10]:

$$c^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial^2 E_0}{\partial N^2}, \tag{32}$$

де c — швидкість першого звуку в бозе-системі при температурі абсолютного нуля, N — кількість частинок, m — маса частинки, E_0 — енергія основного стану в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". Вираз для E_0 ми отримаємо трохи згодом і покажемо, що він збігається з відомим результатом [4].

Отож для величини ν_0 будемо мати:

$$\begin{aligned}
\nu_0 \;&=\; \frac{1}{\rho}\Bigg[mc^2 + \frac{1}{8N}\sum_{q\neq 0}\varepsilon_q\frac{1}{\alpha_q}\left(\alpha_q - \frac{1}{\alpha_q}\right)^2 - \frac{\hbar^2}{48mN^2}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0 \\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\Bigg\{2\left(f_1 - \frac{f_2^2}{f_3} - 2f_4\right) + 2\left(f_1' - \frac{2f_2f_2'}{f_3} + \frac{f_2^2f_3'}{f_3^2} - 2f_4'\right) \\
&+ \left(f_1'' - \frac{2f_2'' + 2(f_2')^2}{f_3} + \frac{4f_2f_2'f_3' + f_2^2f_3''}{f_3^2} - \frac{2f_2^2(f_3')^2}{f_3^3} - 2f_4''\right)\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}$$

Тут ρ — це густина бозе-системи. Явні вирази для величин $f_1, f_2, f_3, f_4, f_1', f_2', f_3', f_4', f_1'', f_2'', f_3'', f_4''$ наведені в Додатку 2.

Якщо тепер зі знайдених середніх $\left\langle \hat{K}_1 \right\rangle$, $\left\langle \hat{K}_{23} \right\rangle$, $\left\langle \hat{\Phi} \right\rangle$ виділити тільки внески від парних кореляцій і додати їх, то ми отримаємо вираз для середньої енергії в наближенні парних кореляцій, який збігається з уже відомим [10]:

$$\begin{aligned}
E \;&=\; N\frac{mc^2}{2} + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q} - 1} + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\lambda_q}{1+\lambda_q S_0(q)}\frac{\partial S_0(q)}{\partial \beta} + \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q(\lambda_q^2 + \alpha_q - 1)\frac{S_0(q)}{1+\lambda_q S_0(q)} \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\varepsilon_q\left[\frac{\alpha_q}{\mathrm{sh}[\beta\alpha_q\varepsilon_q]} - \frac{1}{\mathrm{sh}[\beta\varepsilon_q]}\right] + \frac{1}{16}\sum_{q\neq 0}\varepsilon_q\left(1 - \frac{1}{\alpha_q^2}\right)\left(\alpha_q - \frac{1}{\alpha_q} - 4\alpha_q^2\right).
\end{aligned} \tag{33}$$

6 Кінетична, потенціальна і повна енергія в границі низьких температур

В границі низьких температур парний структурний фактор ідеального бозе-газу рівний одиниці, а його похідна по оберненій температурі рівна нулю. Враховуючи відомі вирази для дво- і тричастинкового структурного фактора в границі низьких температур [53], а також те, що

$$
\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} C_2(\mathbf{q}_1) &= \frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{2}a_2(\mathbf{q}_1),\\
\lim_{\beta\to\infty} C_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) &= \lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = \frac{1}{6}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3),\\
\lim_{\beta\to\infty} C_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) &= \lim_{\beta\to\infty}\widetilde{C}_4(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) = \frac{1}{8}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2),
\end{aligned}
\tag{34}
$$

де

$$
a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) = -\frac{\sum\limits_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)}{2\sum\limits_{j=1}^{3}\mathbf{q}_j^2\alpha_{q_j}},
\tag{35}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2) &= \frac{(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)^2a_3^2(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)+(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)^2a_3^2(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}\\
&- \frac{[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_2}-1)]a_3(\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}}\\
&- \frac{[(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)(\alpha_{q_1}-1)+(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_2-\mathbf{q}_1)(\alpha_{q_2}-1)]a_3(\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}+q_2^2\alpha_{q_2}},
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
a_2(\mathbf{q}_1) = \frac{1}{N}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\left[\frac{q_2^2}{2q_1^2\alpha_{q_1}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)+\frac{(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2)}{q_1^2\alpha_{q_1}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2)\right],
\tag{37}
$$

для середньої кінетичної енергії в границі низьких температур знайдемо такий вираз:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{K}\right\rangle &= \frac{1}{4}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2q^2}{2m}\frac{(\alpha_q-1)^2}{\alpha_{q_1}} + \frac{1}{8N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right] - \frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2}a_2(\mathbf{q}_1)\\
&- \frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\\
&+ \frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2q_1^2}{2m}\frac{1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3) - \frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2)}{2m}\left(\frac{(\alpha_{q_1}-1)(\alpha_{q_2}-1)}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{|\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2|}}\right.\\
&- \left.2\frac{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}-1}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)\right)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Аналогічно, для середньої потенціальної енергії будемо мати:

$$
\left\langle\hat{\Phi}\right\rangle = N\frac{mc^2}{2} + \frac{1}{16}\sum_{q\neq 0}\frac{\hbar^2q^2}{2m}\left(1-\frac{1}{\alpha_q^2}\right)\left(\alpha_q-\frac{1}{\alpha_q}-4\alpha_q^2\right) + \sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\hbar^2q^2}{8m}\frac{\alpha_q^2-1}{\alpha_{q_1}}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{8N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}+1}{\alpha_{q_1}}\left[\prod_{i=1}^{3}\frac{\alpha_{q_i}-1}{\alpha_{q_i}}\right]+\frac{1}{2N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2}a_2(\mathbf{q}_1)\\
&+ \quad \frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3)+\frac{1}{4N}\sum_{\mathbf{q}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}}a_4(\mathbf{q}_1,-\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,-\mathbf{q}_2)\\
&+ \quad \frac{1}{2N}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\frac{\hbar^2 q_1^2}{2m}\frac{\alpha_{q_1}^2-1}{\alpha_{q_1}^2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}}a_3^2(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3). \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Додавши вирази для середніх значень кінетичної і потенціальної енергій та провівши необхідні перетворення, ми отримаємо величину середнього значення повної енергії в границі низьких температур в такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
E \quad = \quad & \left\langle \hat{K}\right\rangle + \left\langle \hat{\Phi}\right\rangle = N\frac{mc^2}{2}-\frac{1}{16}\sum_{q\neq 0}\frac{\hbar^2 q^2}{2m}\left(1-\frac{1}{\alpha_q^2}\right)^3\left(\alpha_q^2-\frac{3}{4}\alpha_q+\frac{1}{4}\right)+\frac{\hbar^2}{48mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\Bigg[(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\\
\times \quad & \left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right)-\frac{\left(\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1)\right)^2}{\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum\limits_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j}}\Bigg]\\
- \quad & \frac{\hbar^2}{24mN}\sum_{\substack{\mathbf{q}_1\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}}\sum_{\mathbf{q}_2\neq 0}\sum_{\mathbf{q}_3\neq 0}\sum_{1\leq i<j\leq 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right). \qquad (40)
\end{aligned}
$$

Цей вираз для основного стану багатобозонної системи збігається зі знайденим раніше [4].

7 Кінетична, потенціальна і повна енергія в границі високих температур

В границі високих температур парний, три- і чотиричастинковий структурні фактори багатобозонної системи переходять у відповідні вирази для ідеального бозе-газу, а всі внески від три- і чотиричастинкових кореляцій стають рівними нулю [53]. Тому пошук значення кінетичної енергії в границі високих температур зводиться до наступної задачі:

$$\lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K}\right\rangle = \lim_{\beta\to 0}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{\varepsilon_q}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1}, \qquad (41)$$

оскільки всі інші доданки у згаданій вище границі рівні нулю. Вираз (41) містить величину $z_0 = \exp[\beta\mu]$ (μ — це хімічний потенціал), яка називається активність. Умову для її визначення можна записати цим рівнянням:

$$\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\frac{1}{z_0^{-1}e^{\beta\varepsilon_q}-1} = N, \qquad (42)$$

де N — число частинок в бозе-системі. В границі високих температур $z_0 \to 0$, тому написану вище умову можна подати в такий спосіб:

$$z_0\sum_{\mathbf{q}\neq 0}e^{-\beta\varepsilon_q} = N. \qquad (43)$$

Переходячи в цій рівності від пісумовування до інтегрування, будемо мати:

$$z_0\frac{4\pi V}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty q^2 e^{-\beta\frac{\hbar^2}{2m}q^2}dq = z_0\frac{V}{4}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}} = N. \qquad (44)$$

Звідси

$$z_0^{-1} = \frac{1}{4\rho}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}. \tag{45}$$

Підставивши щойно отриманий результат у рівність (41), провівши відповідні спрощення і перейшовши від підсумовування до інтегрування, знайдемо, що

$$\lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K}\right\rangle = \frac{3}{2}NT. \tag{46}$$

Ми отримали результат, котрий збігається з виразом для ідеального газу.

Для значення середньої потенціальної енергії в границі високих температур будемо мати:

$$\lim_{\beta\to 0}\langle\Phi\rangle = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0 + \lim_{\beta\to 0}\frac{N}{2V}\sum_{\mathbf{q}\neq 0}\nu_q(\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle - 1) = \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \tag{47}$$

оскільки

$$\lim_{\beta\to 0}\langle\rho_{\mathbf{q}}\rho_{-\mathbf{q}}\rangle = 1. \tag{48}$$

Об'єднуючи отримані результати, для внутрішньої енергії багатобозонної системи в границі високих температур здобудемо такий вираз:

$$\lim_{\beta\to 0} E = \lim_{\beta\to 0}\left\langle \hat{K}\right\rangle + \lim_{\beta\to 0}\langle\Phi\rangle = \frac{3}{2}NT + \frac{N(N-1)}{2V}\nu_0, \tag{49}$$

який збігається з результатом роботи [55].

8 Чисельні розрахунки

Для чисельного розрахунку внутрішньої енергії рідкого ^{4}He скористаємося знайденими виразами для $\langle K_1\rangle$ (19), $\langle K_{23}\rangle$ (28) і $\langle\Phi\rangle$ (31). Величину ν_0 будемо шукати за наведеною вище формулою (33). Щоб виконати поставлену задачу потрібно від підсумовування перейти до інтегрування за відомим правилом [56]:

$$\sum_{\mathbf{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}. \tag{50}$$

У нашому випадку двох сум це правило стане дещо складнішим:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{\mathbf{k}_1\neq 0}\sum_{\mathbf{k}_2\neq 0}\sum_{\substack{\mathbf{k}_3\neq 0\\ \mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0}} = \frac{1}{8\pi^4\rho^2}\int\limits_0^\infty k_1dk_1\int\limits_0^\infty k_2dk_2\int\limits_{|q_1-k_2|}^{|q_1+k_2|} k_3dk_3, \tag{51}$$

де ρ — це рівноважна густина бозе-системи. Для такої квантової рідини як ^4He вона рівна $\rho = 0.02185\text{Å}^{-3}$; швидкість першого звуку в рідкому ^4He при нулі температур $c = 238.2$ м/с [57].

При чисельних розрахунках кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії у виразах, які відтворюють наближення парних кореляцій, ми використовували ефективну масу атома ^{4}He в рідині [54], натомість у виразах, які містять дві суми за хвильовим вектором, стоїть "гола" маса. Обґрунтування такого підходу наведено в роботі [53].

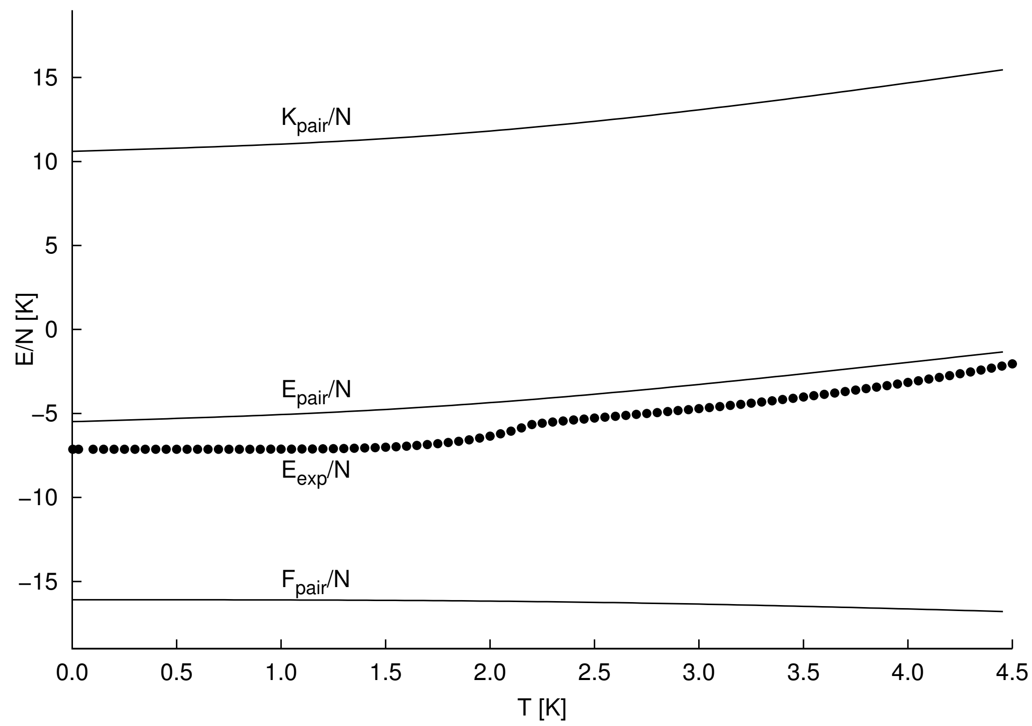

Рис. 1: Температурна залежність кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He, розрахованих в наближенні парних кореляцій. K_{pair}/N — кінетична енергія, F_{pair}/N — потенціальна енергія, E_{pair}/N — повна внутрішня енергія, E_{exp}/N — експериментальні дані.

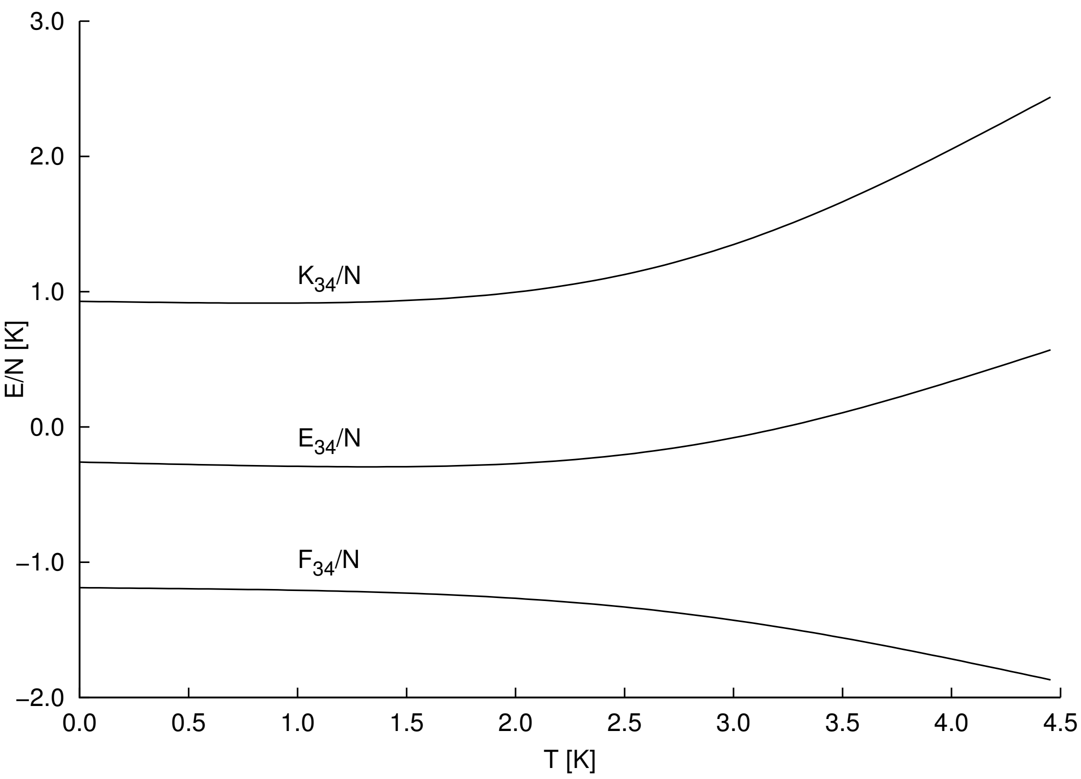

Рис. 2: Внесок три- ча чотиричастинкових кореляцій в значення кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He. K_{34}/N — внесок у кінетичну енергію, F_{34}/N — внесок у потенціальну енергію, E_{34}/N — внесок у повну внутрішню енергію.

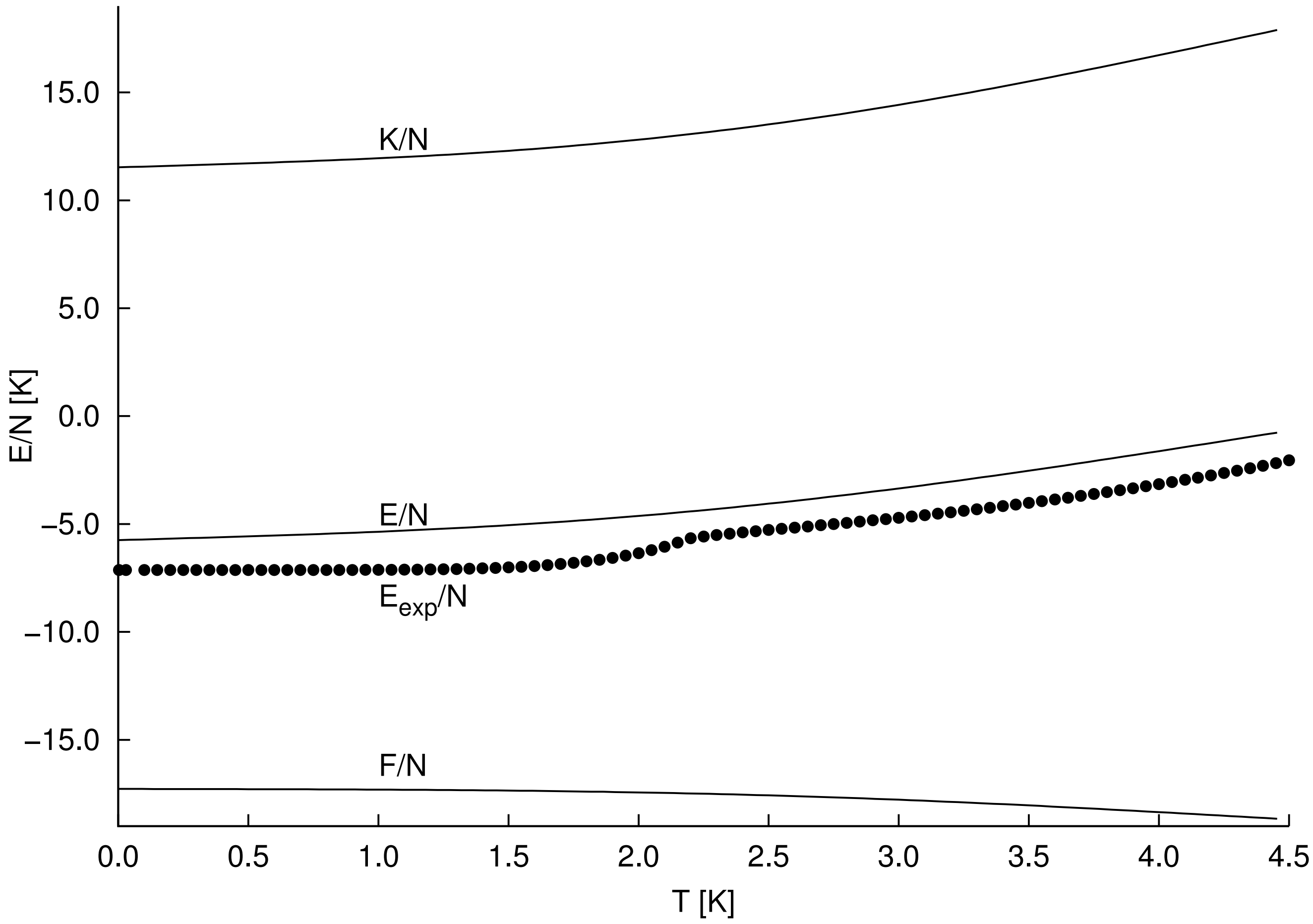

Рис. 3: Температурна залежність кінетичної, потенціальної і повної внутрішньої енергії рідкого ^{4}He, розрахованих в наближенні "двох сум за хвильовим вектором". K/N — кінетична енергія, F/N — потенціальна енергія, E/N — повна внутрішня енергія, E_{exp}/N — експериментальні дані.

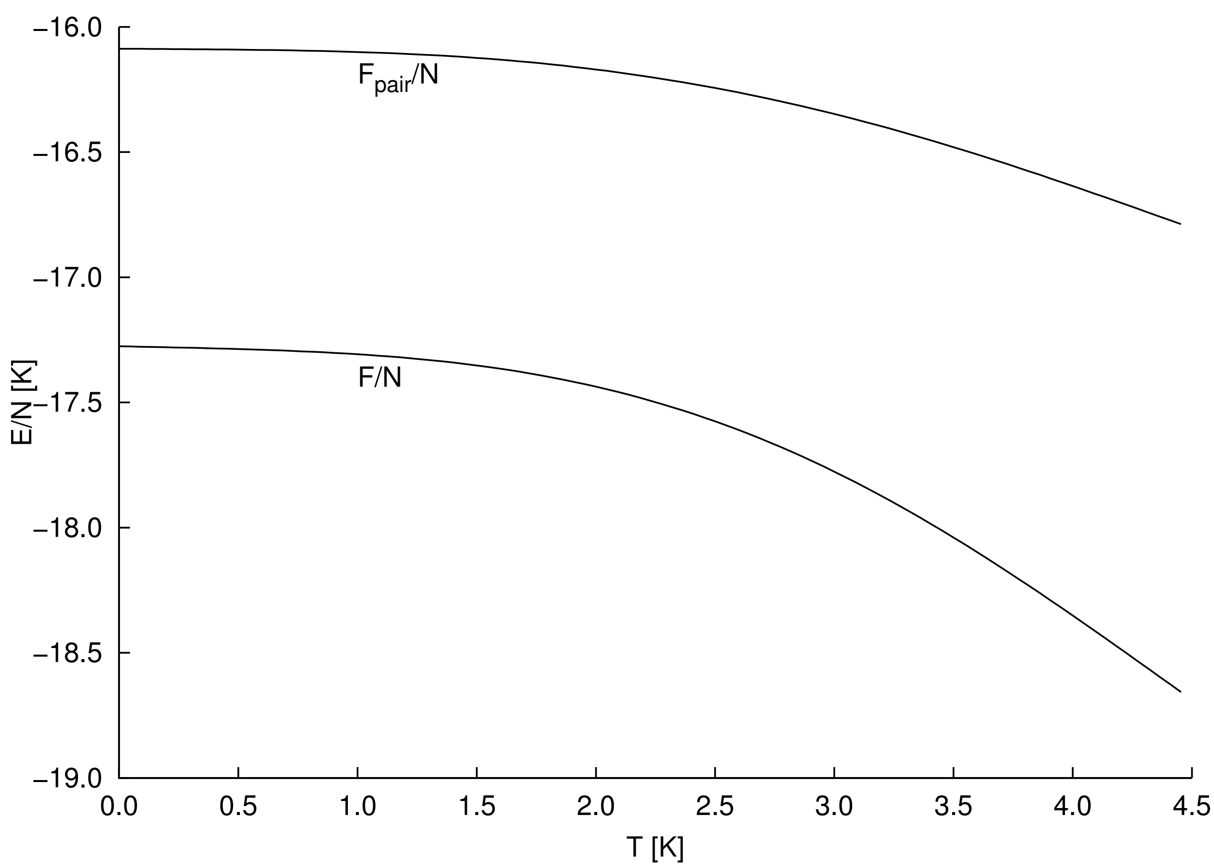

Рис. 4: Температурна залежність потенціальної енергії рідкого ^{4}He. F_{pair}/N — потенціальна енергія в наближенні парних кореляцій, F/N — потенціальна енергія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

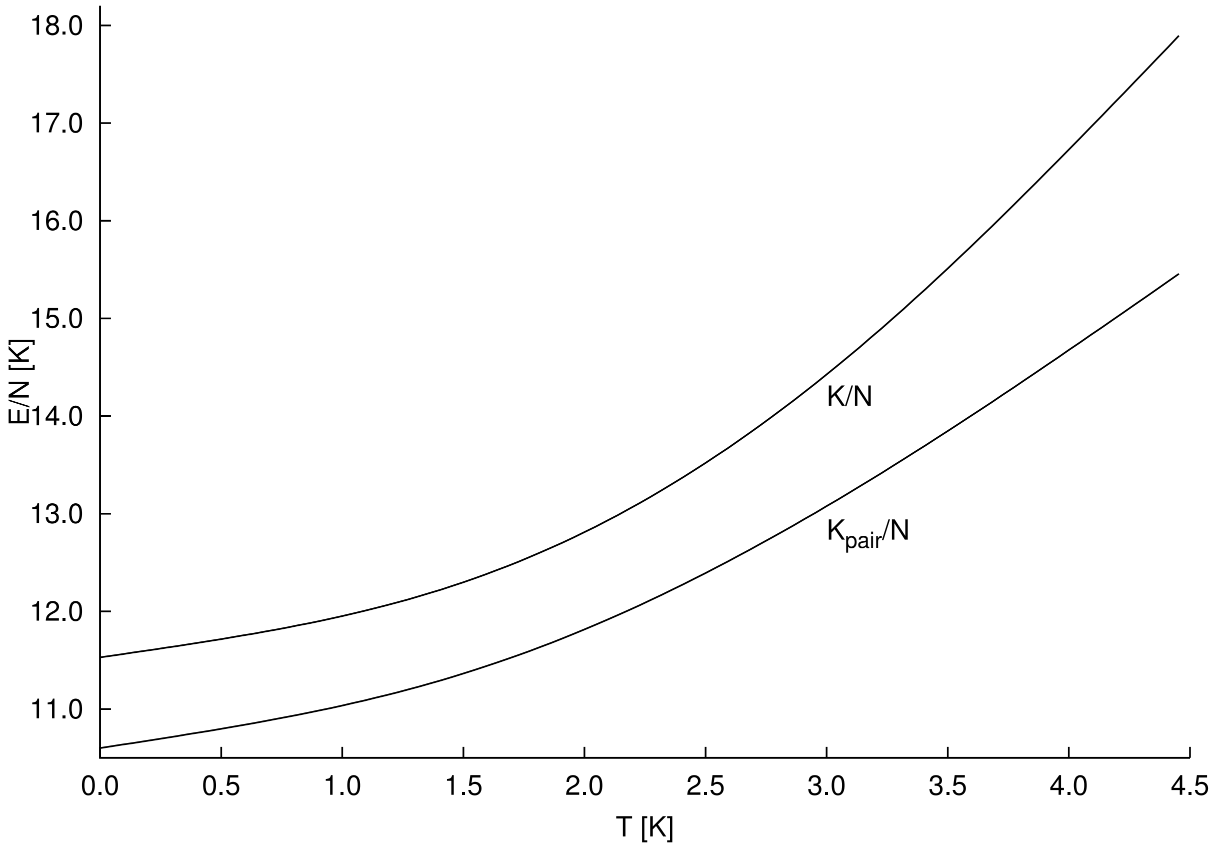

Рис. 5: Температурна залежність кінетичної енергії рідкого ^{4}He. K_{pair}/N — кінетична енергія в наближенні парних кореляцій, K/N — кінетична енергія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

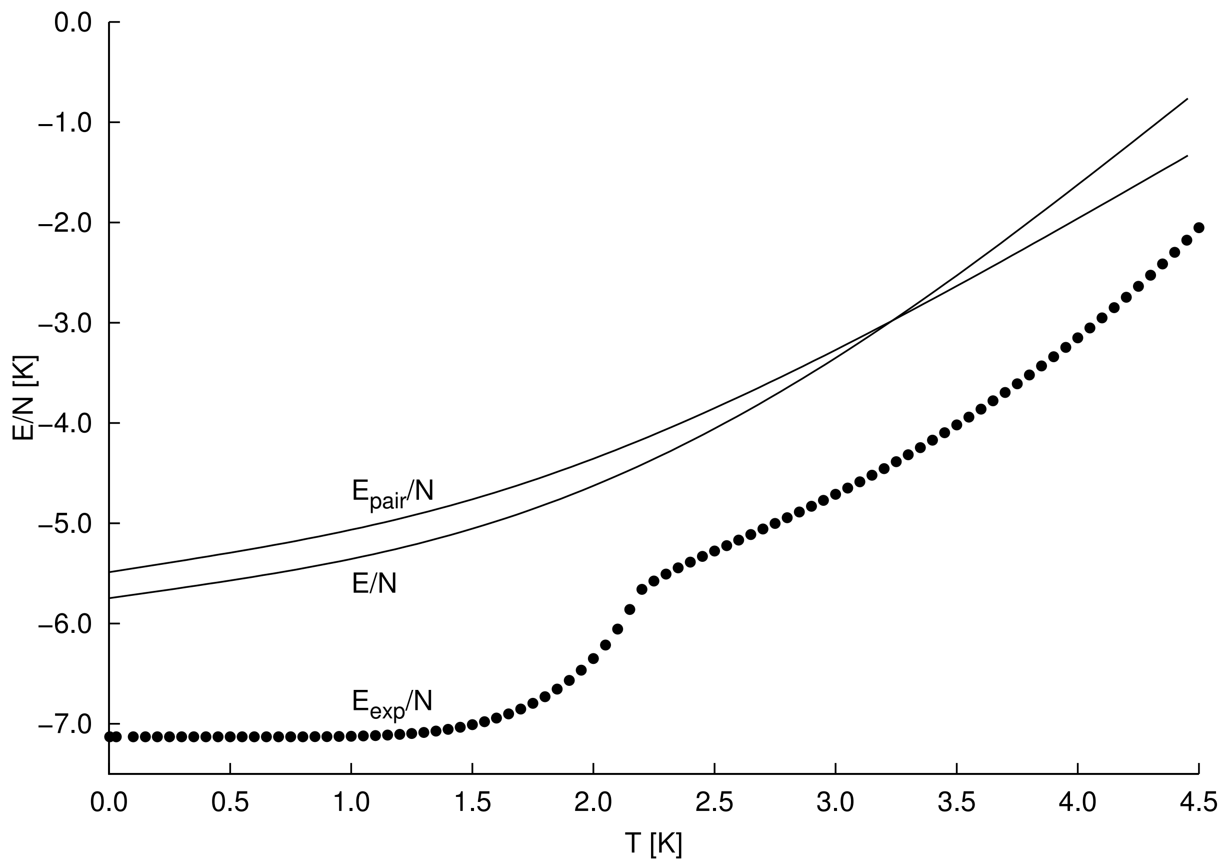

Рис. 6: Температурна залежність повної внутрішньої енергії рідкого ^4He. E_{pair}/N — внутрішня енергія в наближенні парних кореляцій, E/N — внутрішня енергія в наближенні "двох сум за хвильовим вектором".

9 Висновок

В цій роботі були знайдені вирази для кінетичної, потенціальної та повної енергії в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" із врахуванням прямих три- і чотиричастинкових кореляцій в широкотемпературній ділянці.

В границі низьких температур для внутрішньої енергії ми отримали вже відоме значення [4]. Ці самі слова будуть актуальними і по відношенню до границі високих температур. Отримані вирази є доволі громіздкими. Для їх аналізу були застосовані чисельні методи і в результаті здобуто графічне представлення температурної залежності кінетичної, потенціальної і повної енергії рідкого ^{4}He. Результати, які ми отримали в наближенні "двох сум за хвильовим вектором" краще узгоджуються з експериментальними даними в порівнянні з наближенням парних кореляцій.

10 Додаток 1

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{C}_2(\mathbf{q_1}) = 2C_2(\mathbf{q_1}) + \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{q_1^2+q_2^2}{\alpha_{q_2}\operatorname{sh}^2[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_2]}\left\{\frac{\beta}{2}\operatorname{ch}[\beta E_{q_1}]\operatorname{ch}[\beta E_{q_2}]\right.\\
-&\left.\frac{\operatorname{ch}[\beta E_1]\operatorname{sh}[\beta E_2]}{2E_2} - \frac{\operatorname{sh}[\beta E_1]\operatorname{ch}[\beta E_2]}{2E_1} + \frac{\operatorname{sh}[\beta(E_1+E_2)]}{4(E_1+E_2)} + \frac{\operatorname{sh}[\beta(E_1-E_2)]}{4(E_1-E_2)}\right\}\\
-&\frac{1}{8}\sum_{\substack{\mathbf{q_2}\neq 0\\ \mathbf{q_1}+\mathbf{q_2}+\mathbf{q_3}=0}}\sum_{\mathbf{q_3}\neq 0}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2\frac{Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\tilde E\operatorname{sh}^2[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_2}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_3}]}\\
\times&\left\{\frac{\beta}{4}\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\beta(\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right]Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3}) - \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E\right]}{2\tilde E}\right.\\
\times&\left(\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(-\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right]\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\right)Q(\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
+&\left[-\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E_{q_2}\right]}{2\tilde E_{q_2}}\left(\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_2}+2E_{q_3})\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E_{q_2}\right]\right) + \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_1}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde E_{q_1}+E_{q_3})}\right.\\
\times&\left.\left(\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(E_{q_3}-\tilde E_{q_1})\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_1}+2\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right]\right)\right]Q(\tilde\alpha_{q_1},-\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
+&\left[-\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E_{q_1}\right]}{2\tilde E_{q_1}}\left(-\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde E_{q_1}\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_1}+2\tilde E_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)\right.\\
+&\left.\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right]}{2(\tilde E_{q_2}+E_{q_3})}\operatorname{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right]\right]Q(-\tilde\alpha_{q_1},\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\\
+&\left[-\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{2E_{q_3}}\left(\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(2\tilde E_{q_2}+E_{q_3})\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\right) + \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2})\right]}{2(\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2})}\right.\\
\times&\left.\left.\left(\operatorname{ch}\left[\beta\tilde E_{q_1}\right]\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_2}-\tilde E_{q_1})\right] + \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right)\right]Q(-\tilde\alpha_{q_1},-\tilde\alpha_{q_2},\alpha_{q_3})\right\}.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{C}_3(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2},\mathbf{q_3}) = -\frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(\mathbf{q_1}\mathbf{q_2})}{\operatorname{sh}[\beta E_{q_1}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_2}]\operatorname{sh}[\beta E_{q_3}]}\sum_{\pm_1}\sum_{\pm_2}(\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\pm_1\pm_2 1)\\
\times&\ \operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2}\right)\right]\operatorname{ch}\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\beta}{2}\left(\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2}+E_{q_3}\right)\right]}{\tilde E_{q_1}+\tilde E_{q_2}+E_{q_3}}.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

$$
\widetilde{C}_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) = C_4(\mathbf{q_1},\mathbf{q_2}) - \frac{1}{64}\sum_{\mathbf{q_1}\neq 0}\sum_{\mathbf{q_2}\neq 0}\frac{\hbar^2}{2m}\frac{(q_1^2+q_2^2)}{\operatorname{ch}^2\left[\frac{\beta}{2}E_1\right]\operatorname{sh}^2[\beta E_2]}\left\{2\beta\operatorname{ch}[\beta E_{q_2}] + \frac{2\operatorname{sh}[\beta E_2]}{E_2}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&- \quad \frac{2\,\mathrm{sh}[\beta E_1]\,\mathrm{ch}[\beta E_2]}{E_1} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1+E_2)]}{(E_1+E_2)} + \frac{\mathrm{sh}[\beta(E_1-E_2)]}{(E_1-E_2)} \Big\} - \frac{1}{64} \sum_{\substack{\mathbf{q}_3\neq 0\\ \mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0}} \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^2 \\
&\times \quad \frac{Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3})}{\alpha_{q_3}\tilde{E}\,\mathrm{sh}^2\left[\beta E_1\right]\mathrm{sh}^2\left[\beta E_2\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_3\right]} \Bigg\{ \Bigg(\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ch}\left[\beta \tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\beta E_{q_3}\right] - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]}{2\tilde{E}} \\
&\times \quad \left(\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right] + \mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}\right]\right) Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) \\
&+ \quad \Bigg[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right]}{\tilde{E}_{q_2}} \left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+2E_{q_3})\right]\right) - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})} \\
&\times \quad \left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+E_{q_3})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}-E_{q_3})\right]\right)\Bigg] Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) \\
&+ \quad \Bigg[\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]}{\tilde{E}_{q_1}} \left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3}\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_1}\right]\right) - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})\right]}{(\tilde{E}_{q_2}+E_{q_3})} \\
&\times \quad \mathrm{sh}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{ch}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_2}-E_{q_3})\right]\Bigg] Q(-\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) + \Bigg[\frac{\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}E_{q_3}\right]}{E_{q_3}}\mathrm{sh}^2\left[\frac{\beta}{2}\tilde{E}_{q_2}\right] - \frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right]}{(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})} \\
&\times \quad \left(\mathrm{ch}\left[\beta\tilde{E}_{q_2}\right]\mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_2})\right] + \mathrm{sh}\left[\frac{\beta}{2}(\tilde{E}_{q_1}+\tilde{E}_{q_1}+2E_{q_3})\right]\right)\Bigg] Q(\tilde{\alpha}_{q_1},-\tilde{\alpha}_{q_2},\,\alpha_{q_3})\,\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{54}
$$

В написаних вище виразах введені такі позначення:

$$\tilde{E}_{q_1} = \pm_1 E_{q_1};\quad \tilde{E}_{q_2} = \pm_2 E_{q_1};\quad \tilde{\alpha}_{q_1} = \pm_1\alpha_{q_1};\quad \tilde{\alpha}_{q_2} = \pm_1\alpha_{q_2};\quad \tilde{E} = \pm_1 E_{q_1} \pm_2 E_{q_2} + E_{q_3};$$

$$Q(\tilde{\alpha}_{q_1},\tilde{\alpha}_{q_2},\alpha_{q_3}) = (\pm_1 \pm_2 \alpha_{q_1}\alpha_{q_2}+1)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2) + (\pm_1\alpha_{q_1}\alpha_{q_3}+1)(\mathbf{q}_1\mathbf{q}_3) + (\pm_2\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}+1)(\mathbf{q}_2\mathbf{q}_3).$$

11 Додаток 2

$$f_1 = \left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_1}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_2}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_3}}\right).$$

$$f_1' = \frac{1}{2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{1\le i<j\le 3}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right).$$

$$f_1'' \quad = \quad \frac{1}{4^2}\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)\sum_{1\le i<j\le 3}\left\{-3\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^5}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right) + 2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3}\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_k}}\right)\right\}.$$

$$f_2 = \sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)(\alpha_{q_i}-1)(\alpha_{q_j}-1).$$

$$f_2' = \frac{1}{2N}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{(\alpha_{q_i}-1)\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}} + (\alpha_{q_j}-1)\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\right\}.$$

$$f_2'' = \frac{1}{4N^2}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}-(\alpha_{q_i}-1)\frac{(\alpha_{q_j}^2-1)^2}{\alpha_{q_j}^3}-(\alpha_{q_j}-1)\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3}\right\}.$$

$$f_3=\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\alpha_{q_j}.$$

$$f_3'=\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{3}q_j^2\left\{2\alpha_{q_1}\alpha_{q_2}\alpha_{q_3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\}.$$

$$\begin{aligned} f_3''=\frac{1}{4N^2}\sum_{j=1}^{3}q_j^2&\left\{-\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_k}\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^3}+\alpha_{q_j}^2\alpha_{q_i}\frac{(\alpha_{q_k}^2-1)^2}{\alpha_{q_k}^3}\right.\\ +\quad 4\alpha_{q_i}\alpha_{q_j}&\left.\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}+4\alpha_{q_j}\alpha_{q_k}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}}\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}+2\alpha_{q_j}^2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}}\frac{\alpha_{q_k}^2-1}{\alpha_{q_k}}\right\}.\end{aligned}$$

$$f_4=\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right).$$

$$f_4'=\frac{1}{2N}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3}+\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\right\}.$$

$$f_4''=\frac{1}{4N^2}\sum_{1\le i<j\le 3}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j)\left\{2\frac{\alpha_{q_i}^2-1}{\alpha_{q_i}^3}\frac{\alpha_{q_j}^2-1}{\alpha_{q_j}^3}-3\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_i}}\right)\frac{(\alpha_{q_j}^2-1)^2}{\alpha_{q_j}^5}-3\left(1-\frac{1}{\alpha_{q_j}}\right)\frac{(\alpha_{q_i}^2-1)^2}{\alpha_{q_i}^5}\right\}.$$

Література

[1] N. N. Bogoliubov, J. Phys. (USSR) 9, 23 (1947).

[2] Н. Н. Боголюбов, Д. Н. Зубарєв, Журн. эксп. и теор. физ. **28**,129 (1955).

[3] K.A. Brueckner, K.Sawada, Phys.Rev. **106**,1117 (1957).

[4] И. А. Вакарчук, И. Р. Юхновський, Теор. мат. физ. **40**,100 (1979); И. А. Вакарчук, О. Л. Гонопольський, И. Р. Юхновський, Теор. мат. физ. **41**,77 (1979).

[5] И.А. Вакарчук, Теор.мат.физ. **65** , 285 (1985); **80**,439 (1989); **82**, 438 (1990).

[6] И.А. Вакарчук. П.А.Глушак, Теор.мат.физ. **75**, 101 (1988); І. О. Вакарчук, П. А. Глушак, Укр. фіз. журн. **41**, 569 (1996).

[7] П. А. Глушак. Исследование равновесных свойств сверхтекучево гелия-4 при низьких температурах. Кандидатская диссертация. Львов (1992).

[8] I. O. Vakarchuk, V. V. Babin, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **4**, 16 (2000);

[9] I. O. Vakarchuk, A. A. Rovenchak, J. Phys. Stud. **5**, 126 (2001); **4**, 431 (2001).

[10] І. О. Вакарчук, Р. О. Притула, А. А. Ровенчак, Журн. фіз. досл. **11**, 259 (2007).

[11] W. L. McMillan, Phys. Rev. A **138**, 442 (1965).

[12] D. Schiff, L. Verlet, Phys. Rev. **160**, 208 (1967).

[13] V. F. Sears, Phys. Rev. B **28**, 5109 (1983).

[14] V. F. Sears, R. D. McCarty, D. G. Friend, NIST Technical Note 1334 (1998).

[15] Г. Темперли, Дж. Роулисона, Дж. Рашбрука, *Физика простих жидкостей* (Мир, Москва, 1971).

[16] К. Крокстон, *Физика жидкого состояния* (Мир, Москва, 1978).

[17] H. J. Maris, D. O. Edwards, J. Low. Temp. Phys, **129**, 1 (2002).

[18] T. Lindenau, M. L. Ristig, J. W. Clark, K. A. Gernoth, J. Low. Temp. Phys, **129**, 143 (2002).

[19] D. A. Sergatskov, A. V. Babkin, S. T. P. Boyd, R. A. M. Lee, R. V. Duncan, J. Low. Temp. Phys, **134**, 517 (2004).

[20] S. M. Mosameh, A. S. Sandouqa, H. B. Ghassib, B. R. Joudeh, J. Low. Temp. Phys, **175**, 523 (2014).

[21] B. Krishnamachari and G. V. Chester, Phys. Rev. B 61, 9677 (2000).

[22] Frédéric Caupin, Tomoki Minoguchi, J. Low. Temp. Phys, **134**, 181 (2004).

[23] E.Kim, M. H. W. Chan, Science **305**,1941, (2004); Phys. Rev. Lett. **97**,115302, (2006).

[24] R. B. Hallock, M. W. Ray, Y. Vekhov, J. Low. Temp. Phys, **169**, 264 (2012).

[25] M. H. W. Chan, R. B. Hallock, L. Reatto, J. Low. Temp. Phys, **172**, 317 (2013).

[26] C. E. Campbell, B. E. Clements, E. Krotscheck, and M. Saarela, Phys. Rev. B, **55** 3769 (1997)

[27] Manuel Diaz-Avila, Mark O. Kimball, Francis M. Gasparini, J. Low. Temp. Phys, **134**, 613 (2004).

[28] R. H. Anderson, David Z. Li, M. D. Miller, J. Low. Temp. Phys, **169**, 291 (2012).

[29] R. Folk, G. Moser, J. Low. Temp. Phys, **150**, 689 (2008);

[30] Gunaranjan Chaudhry, J. G. Brisson, J. Low. Temp. Phys, **155**, 235 (2009); **158**, 806 (2010).

[31] J. A. Lipa, M. Coleman, D. A. Stricker, J. Low. Temp. Phys, **124**, 443 (2001).

[32] Ali Shams, J. L. DuBois, H. R. Glyde, J. Low. Temp. Phys, **145**, 357 (2006).

[33] M. C. Gordillo, J. Boronat, J. Low. Temp. Phys., **171**, 606 (2013).

[34] J. Boronat, M. C. Gordillo, J. Casulleras, J. Low. Temp. Phys, **126**, 199 (2002).

[35] I. Bešlić, L. Vranješ Markić, S. Kilić, J. Low. Temp. Phys, **143**, 257 (2006).

[36] S. A. Vitiello, J. Low. Temp. Phys, **162**, 154 (2011).

[37] D. M. Ceperley, Rev. Mod. Phys. **67**, 279 (1995).

[38] J. Boronat, K. Sakkos, E. Sola, J. Casulleras, J. Low. Temp. Phys, **148**, 845 (2007).

[39] R. Rota, J. Boronat, J. Low. Temp. Phys, **162**, 146 (2011).

[40] M. H. Kalos, Phys. Rev. **128**, 1791 (1962).

[41] S. Moroni, M. Boninsegni, J. Low. Temp. Phys, **136**, 129 (2004).

[42] J. C. Slater, J. G. Kirkwood, Phys. Rev. **37**, 682 (1931).

[43] Kunimasa Miyazaki and I. M. de Schepper, Phys. Rev. E, **63**, 060201(R) (2001).

[44] J. Egger, E. Krotscheck, R. E. Zillich, J. Low. Temp. Phys, **165**, 275 (2011).

[45] R. A. Aziz, M. J. Slaman, J. Chem.Phys. **94**, 8047 (1991).

[46] R. A. Aziz, M. J. Slaman, A. Koide, A. R. Allnatt, W. J. Meath, Mol. Phys. **77**, 321 (1992).

[47] J. Boronat, J. Casulleras, Phys. Rev. B. **49**, 8920(1994).

[48] B. M. Axilrod, E. Teller, J. Chem. Phys. **11**, 299 (1943).

[49] C. A. Parish, C. E. Dykstra, J. Chem. Phys. **9**, 7618 (1994).

[50] А. А. Ровенчак, Самоузгоджений розрахунок міжатомних потенціалів та термодинамічних функцій гелію-4 в надплинній та нормальній фазах. Кандидатська дисертація. Львів (2003).

[51] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, Журн. фіз. досл. **3**, 3005 (2009).

[52] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, Вісник Львівського університету. Серія фізична. **46**, 3 (2011).

[53] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, arXiv:1506.03707 (2015).

[54] І. О. Вакарчук, О. І. Григорчак, В. С. Пастухов, Р. О. Притула, arXiv:1506.03317 (2015).

[55] I. O. Vakarchuk, J. Phys. Stud. **8**, 223 (2004).

[56] І. Вакарчук, *Вступ до проблеми багатьох тіл* (Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 1999).

[57] R. J. Donnelly, C. F. Barenghi, J. Phys. Chem. Ref. Data, **27**, 6 (1998).